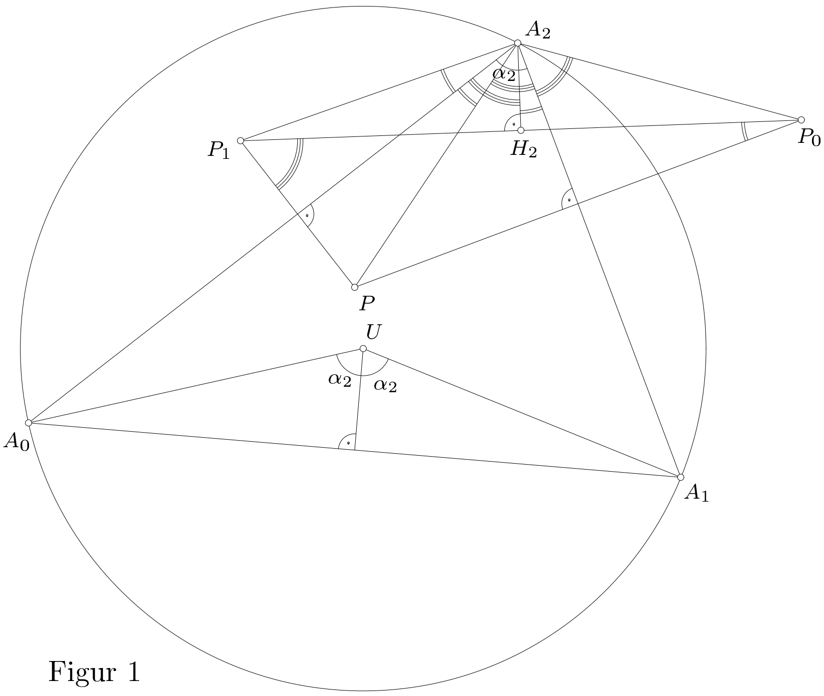
# Vier- und Fünf-Kreise-Punkte

Peter Gallin, Kantonsschule Zürcher Oberland, 8620 Wetzikon, Juni 2003

In diesem Artikel möchte ich zeigen, dass durch das „Hinausspiegeln“ eines Punktes $P$ an den Seiten eines Dreiecks $A_0A_1A_2$ ein Sechseck $A_0P_2A_1P_0A_2P_1$ entsteht, bei dem die 3 Umkreise $k_i$ der Dreiecke $P_iA_{i+1}A_{i+2}$ (jeder Index ist modulo 3 zu verstehen) und der Umkreis $k$ des Dreiecks $P_0P_1P_2$ durch einen gemeinsamen Punkt $S$ gehen (siehe Figur 2). Zum Beweis betrachten wir zunächst die elementare Grundsituation (Figur 1), in der nur die Punkte $P_0$ und $P_1$, sowie der Umkreis des Dreiecks $A_0A_1A_2$ mit Mittelpunkt $U$ eingetragen sind.

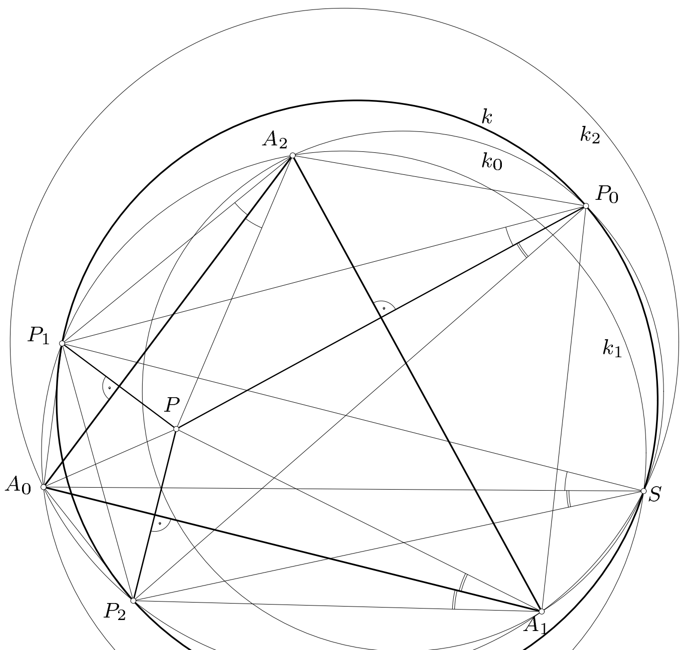



Figur 1

1. Eigenschaft: Da der Winkel $\alpha_2$ bei $A_2$ als Peripheriewinkel die Hälfte des Zentriwinkels $\angle A_0UA_1$ ausmacht und durch das Hinausspiegeln die Winkel $\angle PA_2A_1$ und $\angle PA_2A_0$ verdoppelt werden, gilt $\angle A_0UA_1 = \angle P_0A_2P_1$. Die gleichschenkligen Dreiecke $A_0UA_1$ und $P_0A_2P_1$ sind also ähnlich.

2. Eigenschaft: Fällt man das Lot mit dem Fusspunkt $H_2$ von $A_2$ auf $P_0P_1$, so halbiert der Schenkel $A_2H_2$ den Winkel $\angle P_0A_2P_1$. Damit gilt $\angle P_1A_2H_2 = \angle A_0A_2A_1 = \alpha_2$, woraus sofort $\angle A_0A_2H_2 = \angle PA_2A_1 = \angle A_1A_2P_0$ folgt. Da nun aber $P_1P$ senkrecht zu $A_0A_2$ und $P_1P_0$ senkrecht zu $A_2H_2$ stehen, sind die Winkel $\angle PP_1P_0$ und $\angle A_0A_2H_2$ gleich. Damit gilt $\angle PP_1P_0 = \angle A_1A_2P_0$. Analog gilt auch $\angle PP_0P_1 = \angle A_0A_2P_1$.

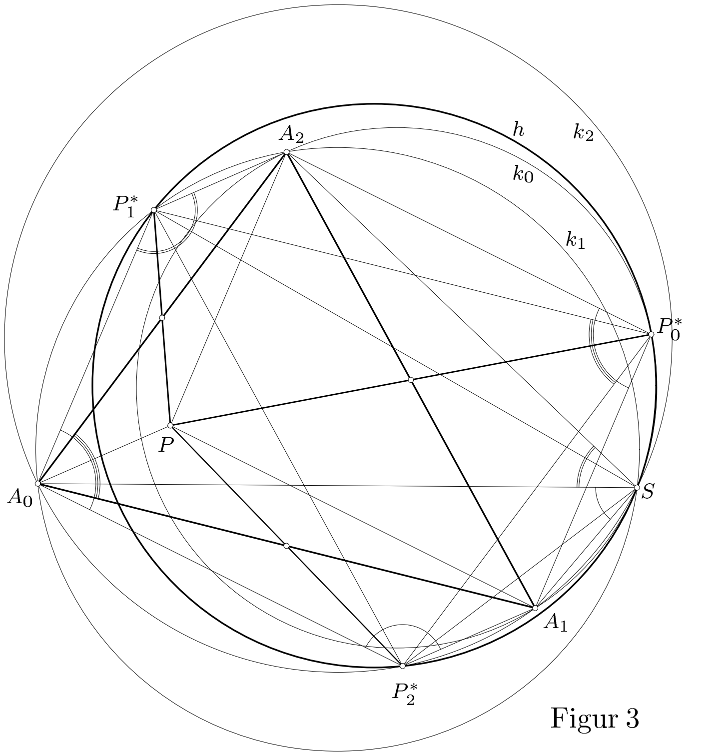
Die erste Eigenschaft brauchen wir später. Aus der zweiten folgt der Beweis der oben ausgesprochenen Behauptung über die vier sich im Punkt $S$ treffenden Kreise recht leicht. Wir nehmen in der nebenstehenden Figur an, dass sich die Umkreise $k_1$ und $k_2$ ausser in $A_0$ noch in $S$ schneiden, und beweisen, dass auch $k$ durch $S$ gehen muss. Es gilt gemäss der zweiten Eigenschaft und dem Peripheriewinkelsatz mit dem Kreis $k_1$: $\angle PP_0P_1 = \angle A_0A_2P_1 = \angle A_0SP_1$. Analog gilt durch Vertauschen den Indizes 1 mit 2: $\angle PP_0P_2 = \angle A_0A_1P_2 = \angle A_0SP_2$. Daraus ergibt sich aber, dass $\angle P_1P_0P_2 = \angle P_1SP_2$, was nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes bedeutet, dass $k$ durch $S$, den von $A_0$ verschiedenen Schnittpunkt von $k_1$ und $k_2$, gehen muss. Durch Umnummerieren kann ebenso bewiesen werden, dass auch $k_0$, $k_1$ und $k$ durch einen einzigen Punkt gehen müssen. Das kann aber nur der Punkt $S$ sein. Damit gehen also alle vier Kreise $k_0$, $k_1$, $k_2$ und $k$ durch den Punkt $S$.




Figur 2

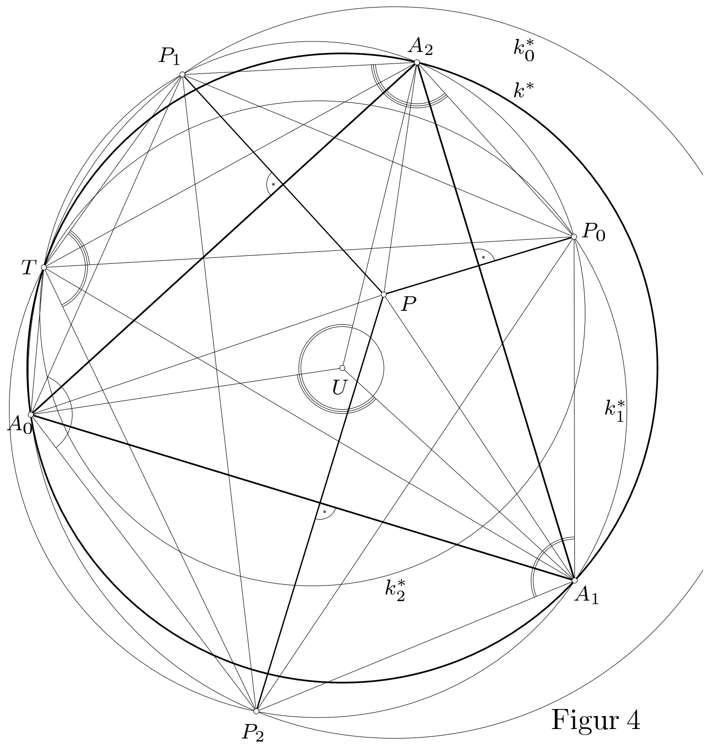
**Eine erste Variation liefert den fünften Kreis:** Man kann den Punkt $P$ auch an den Seitenmitten des Dreiecks $A_0A_1A_2$ in die 3 Punkte $P_i^*$ hinaus spiegeln. Diese drei Punkte liegen wiederum auf denselben Kreisen $k_i$ wie zuvor (siehe Figur 3).

Erstaunlicherweise lässt sich in diesem Fall noch viel einfacher beweisen, dass die Kreise durch einen Punkt $S$ gehen. Dazu beachtet man nur, dass das entstehende Sechseck $A_0P_2^*A_1P_0^*A_2P_1^*$ punktsymmetrisch ist, dass also gegenüberliegende Winkel gleich gross sind. Nehmen wir in der nebenstehenden Figur an, $S$ sei als von $A_0$ verschiedener Schnitt der Kreise $k_1$ und $k_2$ festgelegt. Damit gilt mit dem Peripheriewinkelsatz auf dem Kreis $k_1$: $\angle A_0SA_2 = 180^\circ - \angle A_0P_1^*A_2$. Analog gilt mit dem Peripheriewinkelsatz auf dem Kreis $k_2$: $\angle A_0SA_1 = 180^\circ - \angle A_0P_2^*A_1$. Daraus ergibt sich: $\angle A_1SA_2 = \angle A_0SA_2 + \angle A_0SA_1 = 360^\circ - (\angle A_0P_1^*A_2 + \angle A_0P_2^*A_1)$. Da im punktsymmetrischen Sechseck die Summe der drei bei $P_i^*$ liegenden Winkel $360^\circ$ beträgt, folgt, dass $\angle A_1SA_2 = \angle A_1P_0^*A_2$. Damit muss also der Kreis $k_0$ auch durch den Punkt $S$ gehen. Jetzt muss man nur noch beweisen, dass auch der Umkreis $h$ des Dreiecks $P_0^*P_1^*P_2^*$ durch $S$ geht. Dazu beachten wir, dass wegen der Punktsymmetrie gilt: $\angle P_1^*A_0P_2^* = \angle A_1P_0^*A_2$. Nun entfernen wir dem Winkel $P_1^*A_0P_2^*$ seitlich die beiden Winkel $P_1^*A_0A_2$ und $P_2^*A_0A_1$, welche nach dem Peripheriewinkelsatz auf dem Kreis $k_1$ beziehungsweise $k_2$ gleich gross sind wie die Winkel $P_1^*SA_2$ und $P_2^*SA_1$. Wegen der eben bewiesenen Tatsache, dass $\angle A_1P_0^*A_2 = \angle A_1SA_2 = \angle P_1^*A_0P_2^*$, folgt, dass $\angle P_1^*SP_2^* = \angle A_1A_0A_2$. Dieser zweite Winkel ist aber aus Symmetriegründen gleich gross wie $\angle P_1^*P_0^*P_2^*$. Damit ist mit der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes gezeigt, dass der Umkreis $h$ des Dreiecks $P_0^*P_1^*P_2^*$ durch $S$ geht.



Figur 3

**Zweite Variation:** Vertauscht man die Rollen von $P_i^*$ und $A_i$, d. h. bildet man die drei Umkreise der Dreiecke $A_iP_{i+1}^*P_{i+2}^*$, so ändert sich wegen der Punktsymmetrie des Sechsecks nichts am Beweis, dass die entsprechenden (anderen) vier Kreise durch einen Punkt laufen. Vertauscht man dagegen die Rollen von $P_i$ und $A_i$ im ersten Fall, so entsteht eine neue Konfiguration (Figur 4), bei der sich die entsprechenden vier Kreise $k^*$, $k_0^*$, $k_1^*$ und $k_2^3$ wieder in einem Punkt treffen. Allerdings ist ein neuer Beweis nötig. Wir nehmen in der nebenstehenden Figur an, der Punkt $T$ sei der von $P_0$ verschiedene Schnittpunkt der Kreise $k_1^*$ und $k_2^*$. Dank der oben bewiesenen 1. Eigenschaft gelten die drei Beziehungen: $\angle A_{i+1}UA_{i+2} = \angle P_{i+2}A_iP_{i+1}$ Die Summe der drei Winkel ist $360^\circ$. Daher gilt: $\angle P_2A_0P_1 = 360^\circ - \angle A_0UA_1 - \angle A_2UA_0$. Andererseits gilt $\angle P_0TP_2 = 180^\circ - \angle P_0A_1P_2$ und $\angle P_0TP_1 = 180^\circ - \angle P_0A_2P_1$. Also ist $\angle P_2TP_1 = \angle P_0TP_2 + \angle P_0TP_1 = 360^\circ - \angle P_0A_1P_2 - \angle P_0A_2P_1 = \angle P_2A_0P_1$, womit gezeigt ist, dass $k_0^*$ durch $T$ geht. Schliesslich geht $k^*$ ebenfalls durch $T$ aus folgendem Grund: Weil die Dreiecke $A_2P_0P_1$ bzw. $A_1P_0P_2$ gleichschenklig sind, halbieren die Strecken $A_2T$ bzw. $A_1T$ die Winkel $P_1TP_0$ bzw. $P_2TP_0$. Also gilt $\angle A_2TA_1 = 0.5 \cdot \angle P_2TP_1$. Weil nun $k_0$ durch $T$ geht, gilt weiter $\angle A_2TA_1 = 0.5 \cdot \angle P_2A_0P_1$. Gemäss der 1. Eigenschaft und dem Peripheriewinkelsatz auf dem Kreis $k^*$ folgt schliesslich $\angle A_2TA_1 = 0.5 \cdot \angle A_1UA_2 = 0.5 \cdot \angle A_1A_0A_2$. Damit liegt $T$ auf dem Umkreis des Dreiecks $A_0A_1A_2$.



Figur 4