Der gläserne Aschenbecher

Zur Verallgemeinerung des Eulerschen Polyedersatzes

Der Eulersche Polyedersatz $e - k + f = 2$ wird in der Schule oft unterschätzt und mit für Schülerinnen und Schüler ärgerlichen Voraussetzungen zitiert, so dass er scheinbar wenig Perspektiven für weiterführende Aktivitäten und Untersuchungen bietet. Das hat sich bei einer Diskussion rund um einen gläsernen Aschenbecher unter den Mathematikern im Lehrerzimmer schlagartig verändert.

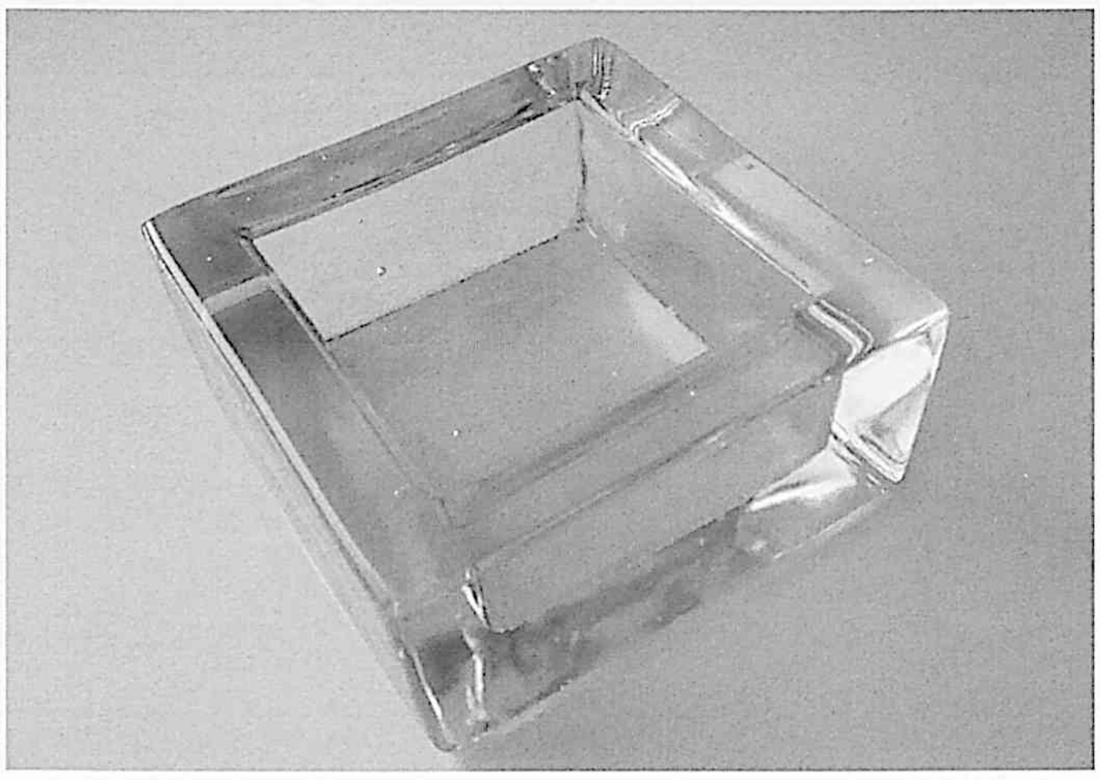

Foto: © Peter Gallin

Abb. 1: Gilt der Eulersche Polyedersatz auch beim alten Aschenbecher aus unserem Lehrerzimmer?

An unserer Schule, der Kantonsschule Zürcher Oberland, gab es eine Zeit, in der im Lehrerzimmer geraucht werden durfte und entsprechend große Aschenbecher aufgestellt waren. Auch auf dem „Mathematikertisch" stand ein Modell, welches damals Standard war: In einem Quader aus Glas war von oben her ein Quader ausgespart worden, so dass eine Mulde für die Asche gebildet wurde (**Abb. 1**).

Bei einem so schönen geometrischen Körper vor Augen, lag es nahe, dass wir in einer Pause den Eulerschen Polyedersatz für die Eckenzahl e, die Kantenzahl k und die Flächenzahl f an diesem Anschauungsobjekt überprüften:

$$e - k + f = 2$$

Schnell waren die Zahlen unter den Kollegen ermittelt: $e = 16$, $k = 24$ und $f = 11$, was auf eine Konstante (die Euler-Charakteristik) 3 anstatt 2 auf der rechten Seite der Gleichung führte. Ebenso rasch war der Grund für die Abweichung gefunden: Der Körper ist ja nicht konvex und diese Voraussetzung sollte erfüllt sein, damit der Eulersche Polyedersatz angewendet werden kann.

Die angeregte Diskussion unter den Mathematik-Kollegen endete kurz vor dem Ende der Pause damit, dass jemand sagte, man solle doch in Gedanken den inneren Quader so stark nach unten vergrößern, bis auch unten ein Loch entstünde. Damit falle eine Fläche weg, nämlich der innere Boden, und die Konstante verringere sich auf 2, was ja dann korrekt sei. Mit einem unguten Gefühl im Bauch verließen die Kollegen das Lehrerzimmer, um in die nächste Unterrichtsstunde zu eilen.

Die Voraussetzungen in Frage stellen?

Man begann über die Sache nachzudenken. Als erstes erinnerte sich ein Kollege, wie sich seine Schülerinnen und Schüler daran stießen, dass in den Voraussetzungen zum Eulerschen Polyedersatz das Wort „konvex" auftauchte. Man kann ja beispielsweise bei einem regulären Ikosaeder durchaus eine Ecke nach innen stülpen, ohne dass sich an der Zahl der Ecken, Kanten und Flächen etwas ändert.

Und beim Beweis des Eulerschen Polyedersatzes hatten sie nur benützt, dass man das Gebilde aus Kanten und Ecken nach Entfernen von einer einzigen Seitenfläche in eine Ebene aufbiegen kann und so einen zusammenhängenden Graphen aus Kanten und Knoten erhält, für den mit Induktion gezeigt werden kann, dass die Beziehung $e - k + f = 2$ gilt, sofern man das umgebende unendliche Gebiet als die zuvor entfernte Fläche mitzählt (s. Jeger/Ineichen 1971). Damit dieses Aufbiegen klappt und damit der Graph zusammenhängend ist, kann man zum Beispiel voraussetzen, dass das ursprüngliche Polyeder topologisch äquivalent zu einer Kugel ist und dass alle Seitenflächen Polygone sind. Diese Voraussetzungen haben den Schülerinnen und Schülern viel besser eingeleuchtet, als die zu starke Voraussetzung der Konvexität.

Damit war eine neue Diskussion zum Aschenbecher angestoßen. Das Problem ist nicht die Einbuchtung. Die Schwierigkeit liegt darin, dass der obere Rand des Aschenbechers kein Polygon, sondern eine ringartige Fläche ist. Natürlich ist ein Mathematiker geneigt, mit einer einzigen Verbindungskante von zwei Punkten des Ringes diesen zu durchschneiden. Das führt sofort auf eine um eins größere Zahl k und der Eulersche Polyedersatz ist erfüllt. Mit dieser neuen Kante wird das aufgebogene Gebilde aus Ecken und Kanten natürlich bereits zusammenhängend, was genügt. Für die Schüler ist aber die stärkere Voraussetzung, alle Seitenflächen seien Polygone, etwas anschaulicher. Daher zerlegt man aus ästhetischen Gründen den Ring nicht nur mit einer einzigen Kante in einer „Ringecke", sondern mit vier Kanten in vier Trapeze (**Abb. 2**). Da diese vier Trapeze an die Form der Fenster von alten Engadinerhäusern (**Abb. 3**) erinnern, nannten wir dieses Vorgehen die „Engadinerisierung des Ringes".

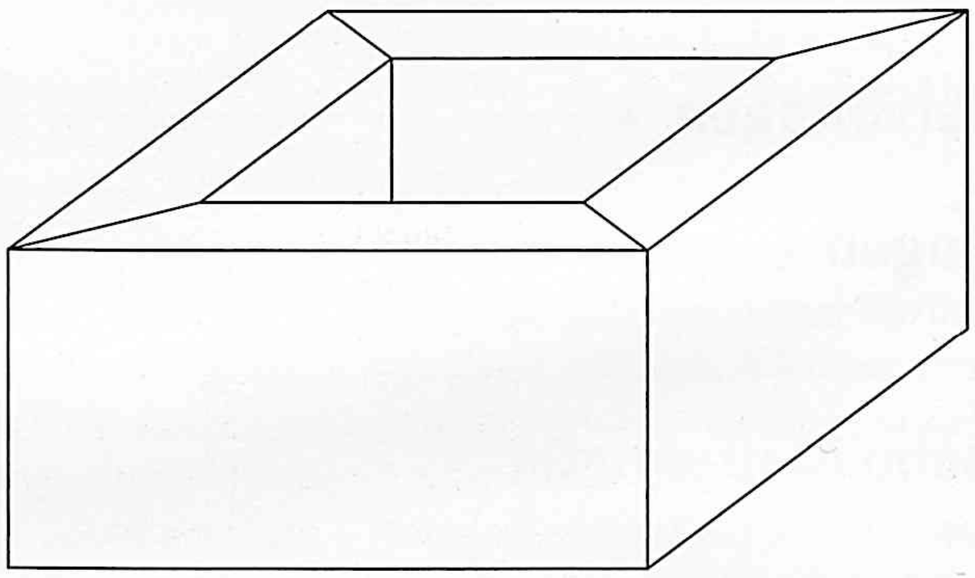

Abb. 2: Die Ringfläche wird in Trapeze zerlegt – nun sind alle Seitenflächen Polygone

Foto: © Duri Zisler

Abb. 3: Vier Trapezflächen eines typischen Fensters im Engadin

Damit erhöht sich bei dem Aschenbecher die Kantenzahl um vier, während anstelle der einen Ringfläche nun vier Flächen gezählt werden müssen. Es erhöht sich die Zahl der Flächen also um drei, die der Kanten um vier, und somit ist der Eulersche Polyedersatz wieder gerettet.

Durchlöcherte Polyeder

Der Kollege, der bei der ersten Begegnung mit dem Aschenbecher den inneren Boden nach unten verschoben hat, bis es ein durchgängiges Loch im Körper gibt, ließ nicht locker und fragte, was denn bei einem torusartigen Körper gelte. Natürlich musste man den nun entstehenden Ring im Boden auch zuerst noch „engadinerisieren", was auf die Zahlen $e = 16$, $k = 24 + 4 + 4 = 32$ und $f = 16$ und somit auf $e - k + f = 0$ führte. Tatsächlich kann man zeigen, dass pro Loch, welches durch ein Polyeder gebohrt wird, die Euler-Charakteristik um 2 sinkt. Hat also ein Körper j Löcher (und hat er damit eine Oberfläche mit dem Geschlecht j), dann lautet der Eulersche Polyedersatz (s. Hilbert/Cohn-Vossen, 1973):

$$e - k + f = 2 - 2j.$$

Damit kommen wir zum total durchlöcherten, aber bereits „engadinerisierten Aschenbecher" und stellen uns folgende Aufgabe: *Wie viele Löcher hat der in allen drei Raumrichtungen durchbohrte Würfel?* (**Abb. 4**) Interessanterweise gibt es drei völlig verschiedene Lösungswege:

Lösung 1

Wir zählen einfach die Ecken, Kanten und Flächen dieses Körpers und setzen die Zahlen e, k und f in die Gleichung des verallgemeinerten Eulerschen Polyedersatzes ein, so dass wir dann die Anzahl j der Löcher berechnen können.

Lösung 2

Mit einer kleinen Vorstellungsübung werden wir den Körper verformen, um die Löcher leicht zählen zu können: Der kleine schwarze, links unten vorne befindliche Würfel sei sehr hitzeresistent (**Abb. 5**). Die unteren vier Balken des Körpers sollen mässig hitzeresistent sein, dagegen aber alle acht oberen Balken leicht schmelzen. Beim Erhitzen werden sich nun die oberen Balken zu Toren verformen und verkleinern. Sind diese Tore klein genug, können wir sie auf den unteren Balken so nach links vorne schieben, bis sie auf dem schwarzen Würfel zu liegen kommen. Schließlich kann der halb hitzeresistente Bogen durch Erhöhen der Temperatur seinerseits angeschmolzen und verkleinert werden, so dass nur noch eine gewisse Zahl von Bögen – die gesuchte Zahl – am kleinen schwarzen Würfel hängen. Solche topologischen Verformungen haben die Schülerinnen und Schüler derart fasziniert, dass zwei von ihnen mir aus Ton geformte Körper brannten, welche die verschiedenen Stadien der Verformung zeigen sollten (**Abb. 6**).

Lösung 3

Die handwerklich schnellste Methode berücksichtigt, dass eine Bohrmaschine, welche die quadratischen Löcher ausbohrt (Weber, 1998), genau dann ein Loch vollendet hat, wenn sich die Tourenzahl der Maschine einmal absenkt und dann einmal erholt. Hört man also innerlich dieser Bohrmaschine während des Bohrens in den drei Raumrichtungen zu, kann man zählen, wie oft sich die Tourenzahl absenkt und wieder normalisiert. Die Anzahl Absenkungen gibt wiederum die gesuchte Anzahl Löcher des Körpers an.

Höhere Dimensionen

Es gibt noch eine weitere Verallgemeinerung des Eulerschen Polyedersatzes Dimensionen: Henri Poincaré (1854–1912) hat für einfache Polyeder im n-dimensionalen Raum gefunden, dass die Anzahlen der begrenzenden Objekte – d. h. die Anzahl N_0 der nulldimensionalen Ecken, die Anzahl N_1 der eindimensionalen Kanten, die Anzahl N_2 der zweidimensionalen Begrenzungspolygone, der Anzahl N_3 der dreidimensionalen Begrenzungspolyeder usw. – in einer alternierenden Summe stets eine Konstante ergeben (s. Hilbert/Cohn-Vossen, 1973):

$$N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} N_{n-1} = 1 - (-1)^n$$

Aus diesem Grund sollte der Eulersche Polyedersatz für $n = 3$ nicht – zur Vermeidung von negativen Zahlen beim Berechnen – in der scheinbar einfacheren Form $e + f - k = 2$, sondern dimensionsmäßig geordnet in der Form $e - k + f = 2$ präsentiert werden (**Tab. 1**).

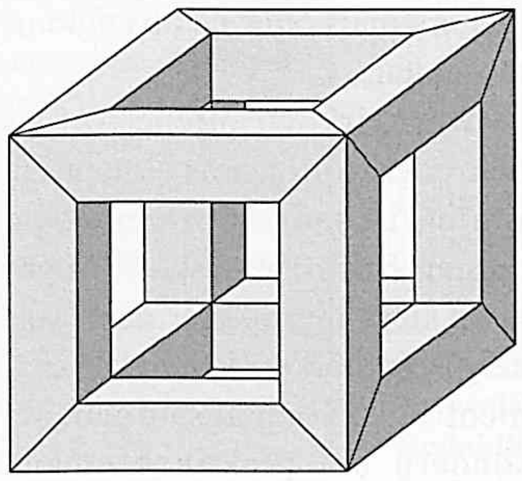

Abb. 4: Wie viele Löcher hat der Körper?

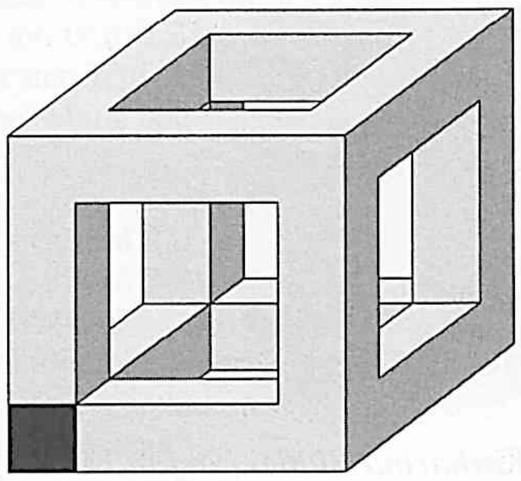

Abb. 5: Vorstellungsübung: Was geschieht beim Schmelzen, wenn der kleine schwarze Würfel hitzeresistent bleibt?

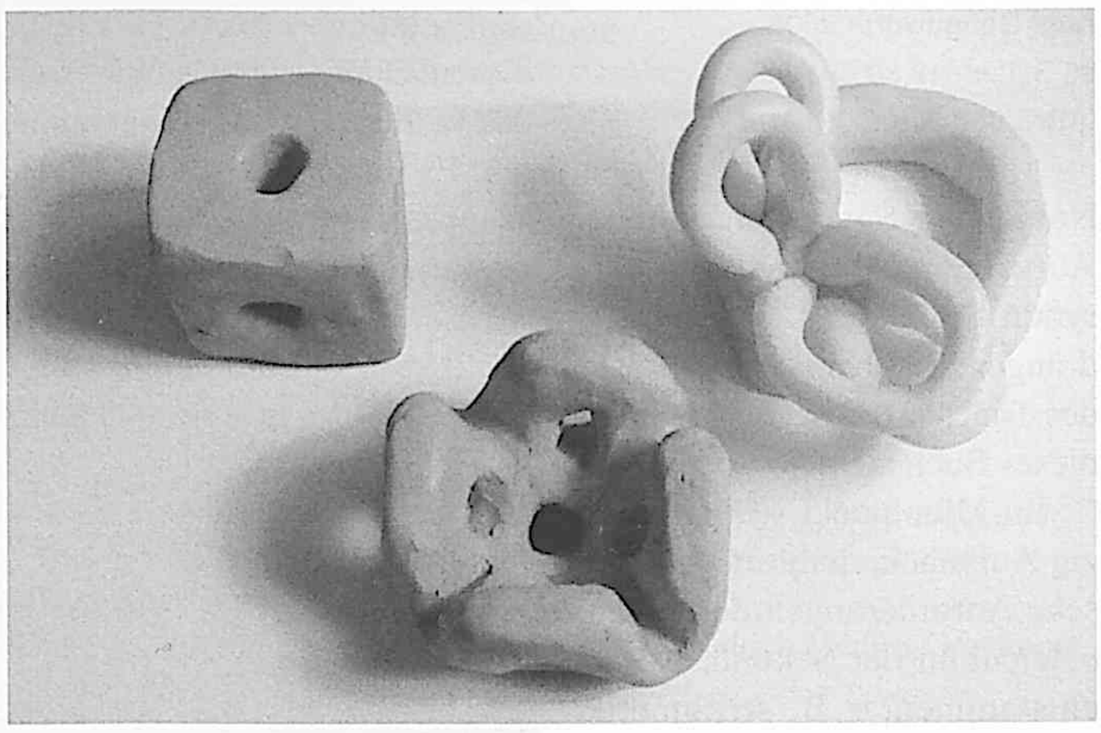

Foto: © Peter Gallin

Abb. 6: Topologisch verformte Objekte – von Schülerinnen erstellt

Polyeder	e	k	f	e – k + f
Tetraeder	4	6	4	2
Würfel	8	12	6	2
Oktaeder	6	12	8	2
Dodekaeder	20	30	12	2
Ikosaeder	12	30	20	2
Fußball	60	90	32	2

Tab. 1: Der Eulersche Polyedersatz sollte dimensionsmäßig geordnet zitiert werden

Literatur

Hilbert, David/Cohn-Vossen, Stefan: Anschauliche Geometrie. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1973, S. 256–260.

Jeger, Max/Ineichen, Robert: Kombinatorik, Statistik und Wahscheinlichkeitsrechnung. Orell Füssli Verlag, Zürich 1971, S. 17.

Weber, Christof: Mathematische Vorstellungsübungen. – In: mathematik lehren, Heft 86, Friedrich Verlag, Velber 1998, S. 42–45.

Hinweis: Einen Film ohne Worte kann von der russischen Homepage in zwei verschiedenen Qualitäten heruntergeladen werden unter: http://www.etudes.ru/ru/mov/mov017/index.php (Download-Links gleich nach dem Titel der Seite).

Peter Gallin,
Wetzikon bei Zürich