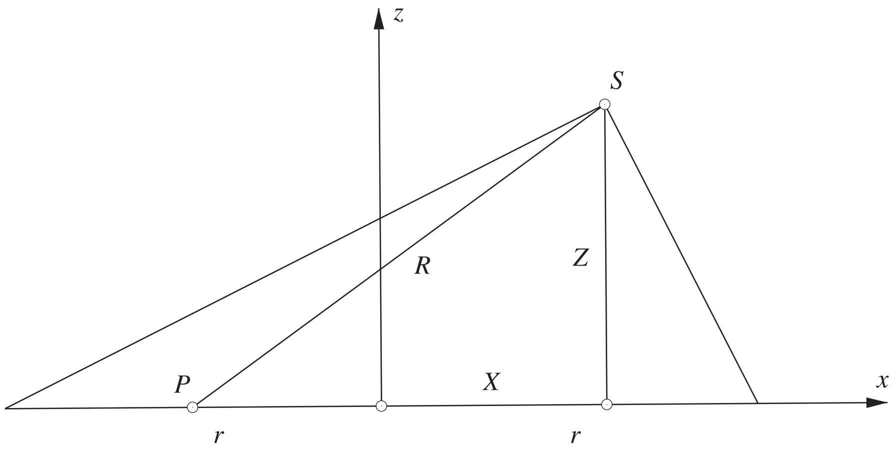
Abwicklung eines schiefen Kreiskegels

Peter Gallin, peter@gallin.ch

Wir betrachten einen schiefen Kreiskegel im kartesischen räumlichen $(x/y/z)$-Koordinatensystem. Die Spitze S des Kegels habe die Koordinaten $(X/0/Z)$. Der Grundkreis mit Mittelpunkt im Ursprung liege in der (x/y)-Ebene und habe den Radius r. Ein beliebiger Punkt P auf der Grundkreislinie habe die Koordinaten $(r\cos u/r\sin u/0)$ mit dem Azimutwinkel u, gemessen von der x-Achse aus. Wir schränken unsere Überlegungen hier schon auf den halben Kegelmantel ein und setzen $0 \leq u \leq \pi$. Die nachfolgende Figur zeigt einen Seitenriss des Körpers mit den Werten $r = 5$, $X = 3$ und $Z = 4$ in Zentimetern.



Im Artikel von W. Wunderlich aus Wien, der in den „Elementen der Mathematik" 1977 [1] erschienen ist, wird das Problem der Abwicklung des Mantels eines schiefen Kreiskegels noch für die damals aktuellen Mittel der Darstellenden Geometrie aufbereitet. Heute hat sich vieles vereinfacht, da einerseits eine leistungsfähige Software für Analysis und andererseits gute Instrumente zum Zeichnen von geometrischen Objekten zur Verfügung stehen. Insbesondere kann man die auftretenden elliptischen Integrale explizit benützen.

Zunächst folgen wir den Ideen von W. Wunderlich und berechnen mit dem Satz von Pythagoras die Länge R einer Mantellinie $\overline{SP}$ in Abhängigkeit des Winkels u:

$$R(u)^2 = (X - r\cos u)^2 + (r\sin u)^2 + Z^2 = X^2 + Z^2 + r^2 - 2rX\cos u$$

Wunderlich setzt sodann $a = rX$ und $b^2 = X^2 + Z^2 + r^2$ und stellt fest, dass es offenbar unendlich viele schiefe Kreiskegel mit veränderlichem Grundkreisradius r und variabler Spitze S gibt, welche genau die gleichen Mantellinienlängen $R(u)$ besitzen, solange nur a und b konstant sind. Daraus leitet er eine einfache Konstruktionsmethode für $R(u)$ ab, ohne dass man die damals berühmte „Wahrelängekonstruktion" der Darstellenden Geometrie bemühen muss. Für unsere Zwecke halten wir bloss fest, dass wir jetzt mit

$$R(u)^2 = b^2 - 2a\cos u \quad \text{oder} \quad R(u) = \sqrt{b^2 - 2a\cos u} \tag{1}$$

[1] W. Wunderlich: Zur Abwicklung des schiefen Kreiskegels. Elemente der Mathematik, Vol. 32/5, Birkhäuser Verlag Basel 1977.

rechnen. Das Hauptproblem besteht nun darin, den Zusammenhang zwischen R und ω, dem Netzwinkel in der Spitze des abgewickelten Mantels, zu finden. Dazu bestimmen wir zuerst den Winkel $\phi(u)$ zwischen der Mantellinie und der Tangente an den Grundkreis im Punkt P. Der Richtungsvektor $\vec{m}$ der Mantellinie ist

$$\vec{m} = \overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} r\cos u - X \\ r\sin u \\ -Z \end{pmatrix}$$

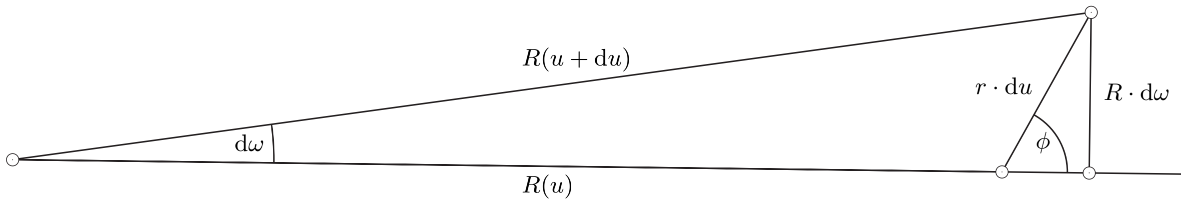
und der Tangenteneinheitsvektor $\vec{t}$ an den Grundkreis lautet

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Mit dem Skalarprodukt erhalten wir den Cosinus des Zwischenwinkels:

$$\cos\phi(u) = \frac{\vec{m}\circ\vec{t}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{t}|} = \frac{-r\cos u\sin u + X\sin u + r\sin u\ \cos u}{R(u)} = \frac{X\sin u}{R(u)} \tag{2}$$

In der nachfolgenden Figur überlegen wir uns, um wie viel der Netzwinkel ω zunimmt, wenn der Parameter u um du zunimmt. Dabei beträgt der Zuwachs auf dem Grundkreisbogen vom Punkt $P(u)$ zum Punkt $P(u + \mathrm{d}u)$ das infinitesimale Stück $r \cdot \mathrm{d}u$.



Aus dieser zweiten Figur liest man nun die infinitesimale Beziehung

$$R \cdot \mathrm{d}\omega = r \cdot \mathrm{d}u \cdot \sin\phi$$

ab. Damit erhalten wir die Ableitung von $\omega(u)$, in der wir gleich (2) verwenden:

$$\omega'(u) = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}u} = \frac{r\cdot\sin\phi(u)}{R(u)} = \frac{r\cdot\sqrt{1-(\cos\phi(u))^2}}{R(u)} = \frac{r\sqrt{R(u)^2-(X\sin u)^2}}{R(u)^2} \tag{3}$$

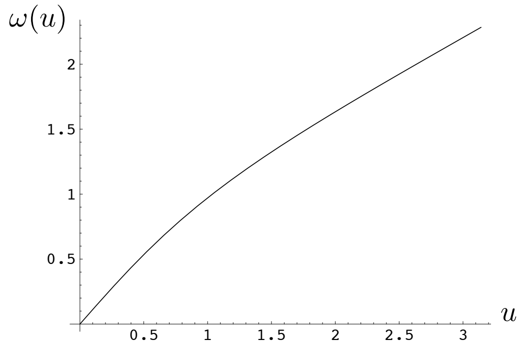
Mit $R(u)$ aus (1) und $\omega(u) = \int_0^u \omega'(\tilde{u})\mathrm{d}\tilde{u}$ kennen wir jetzt eine Polardarstellung der Randkurve der gesuchten Abwicklung. Um ein konkretes Beispiel zu zeigen, wählen wir die Originalwerte $r = 5$, $X = 3$ und $Z = 4$, mit denen die erste Figur gezeichnet worden ist. Damit gilt $a = 15$ und $b = \sqrt{50}$. Die Software *Mathematica* liefert dann für das obige Integral den etwas komplizierten Term `omega[u]` mit elliptischen Integralen, der in der folgenden Abbildung zu sehen ist. Mit dem Befehl „`Plot[omega[u],{u,0,Pi}]`“ erhält man die graphische Darstellung von $\omega(u)$ mit dem Maximalwert für den Netzwinkel $\omega(\pi) = 2.2836868\ldots = 130.8456\ldots^\circ$. Daneben ist auch der Graph von $R(u)$ dargestellt mit $R(0) = 2\sqrt{5}$ und $R(\pi) = 4\sqrt{5}$ als Extremwerte.

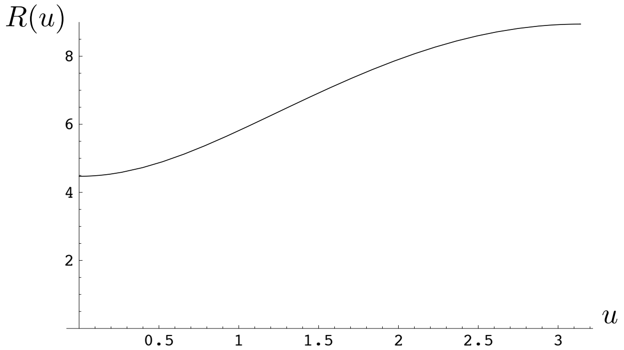
$$\frac{1}{(1+\mathrm{Cos}[u])\sqrt{\frac{91-60\,\mathrm{Cos}[u]+9\,\mathrm{Cos}[2u]}{(1+\mathrm{Cos}[u])^2}}}\Bigg(\sqrt{91-60\,\mathrm{Cos}[u]+9\,\mathrm{Cos}[2u]}$$

$$\Bigg(-\Bigg(5\,I\,\mathrm{EllipticF}\Big[I\,\mathrm{ArcSinh}\Big[\sqrt{\tfrac{8}{5}+\tfrac{6I}{5}}\,\mathrm{Tan}\Big[\tfrac{u}{2}\Big]\Big],\ \tfrac{7}{25}-\tfrac{24I}{25}\Big]\sqrt{1+\left(\tfrac{8}{5}-\tfrac{6I}{5}\right)\mathrm{Tan}\Big[\tfrac{u}{2}\Big]^2}\,\sqrt{1+\left(\tfrac{8}{5}+\tfrac{6I}{5}\right)\mathrm{Tan}\Big[\tfrac{u}{2}\Big]^2}\Bigg)\Big/\Bigg(\sqrt{\tfrac{8}{5}+\tfrac{6I}{5}}\,\sqrt{5+16\,\mathrm{Tan}\Big[\tfrac{u}{2}\Big]^2+20\,\mathrm{Tan}\Big[\tfrac{u}{2}\Big]^4}\Bigg)+$$

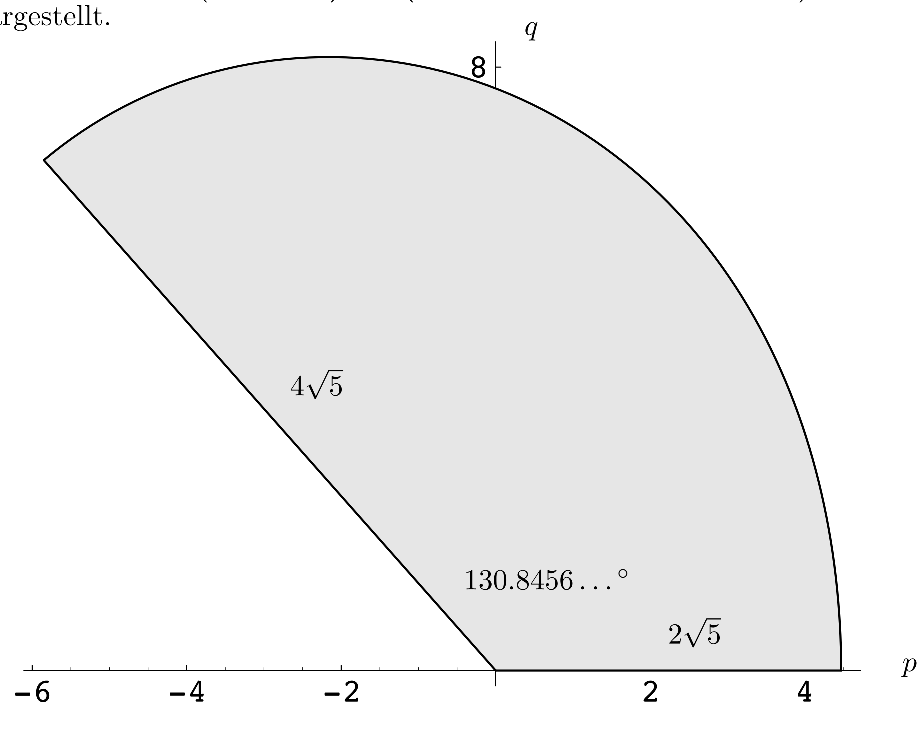
$$\Bigg(3\,I\,\mathrm{EllipticPi}\Big[\tfrac{2}{5}-\tfrac{3I}{10},\ I\,\mathrm{ArcSinh}\Big[\sqrt{\tfrac{8}{5}+\tfrac{6I}{5}}\,\mathrm{Tan}\Big[\tfrac{u}{2}\Big]\Big],\ \tfrac{7}{25}-\tfrac{24I}{25}\Big]\sqrt{1+\left(\tfrac{8}{5}-\tfrac{6I}{5}\right)\mathrm{Tan}\Big[\tfrac{u}{2}\Big]^2}\,\sqrt{1+\left(\tfrac{8}{5}+\tfrac{6I}{5}\right)\mathrm{Tan}\Big[\tfrac{u}{2}\Big]^2}\Bigg)\Big/\Bigg(\sqrt{\tfrac{8}{5}+\tfrac{6I}{5}}\,\sqrt{5+16\,\mathrm{Tan}\Big[\tfrac{u}{2}\Big]^2+20\,\mathrm{Tan}\Big[\tfrac{u}{2}\Big]^4}\Bigg)-$$

$$\Bigg(3\,I\,\mathrm{EllipticPi}\Big[\tfrac{8}{5}-\tfrac{6I}{5},\ I\,\mathrm{ArcSinh}\Big[\sqrt{\tfrac{8}{5}+\tfrac{6I}{5}}\,\mathrm{Tan}\Big[\tfrac{u}{2}\Big]\Big],\ \tfrac{7}{25}-\tfrac{24I}{25}\Big]\sqrt{1+\left(\tfrac{8}{5}-\tfrac{6I}{5}\right)\mathrm{Tan}\Big[\tfrac{u}{2}\Big]^2}\,\sqrt{1+\left(\tfrac{8}{5}+\tfrac{6I}{5}\right)\mathrm{Tan}\Big[\tfrac{u}{2}\Big]^2}\Bigg)\Big/\Bigg(\sqrt{\tfrac{8}{5}+\tfrac{6I}{5}}\,\sqrt{5+16\,\mathrm{Tan}\Big[\tfrac{u}{2}\Big]^2+20\,\mathrm{Tan}\Big[\tfrac{u}{2}\Big]^4}\Bigg)\Bigg)\Bigg)$$





Aus der Polardarstellung mit R und ω machen wir eine Parameterdarstellung der gesuchten Abwicklung des halben Kegelmantels: $\Big(p(u)/q(u)\Big) = \Big(R(u)\cos(\omega(u))/R(u)\sin(\omega(u))\Big)$. Sie ist hier in der Originalgrösse dargestellt.



Wir kontrollieren noch, ob die Länge L der gebogenen Linie stimmt: $L = \int_0^\pi \sqrt{p'(u)^2 + q'(u)^2}\,\mathrm{d}u =$

$$\int_0^\pi \sqrt{\Big(R'(u)\cos(\omega(u)) - R(u)\sin(\omega(u))\cdot\omega'(u)\Big)^2 + \Big(R'(u)\sin(\omega(u)) + R(u)\cos(\omega(u))\cdot\omega'(u)\Big)^2}\,\mathrm{d}u\ ,$$

wobei die Ableitung $R'(u) = \frac{a\sin(u)}{R(u)}$ aus (1) berechnet wird und $\omega'(u)$ aus (3) zu übernehmen ist. Tatsächlich liefert *Mathematica* bei numerischer Integration den Wert $L = 15.707963\ldots$, was mit $r = 5$ genau dem halben Kreisumfang $L = \pi \cdot r = 15.707963\ldots$ entspricht.