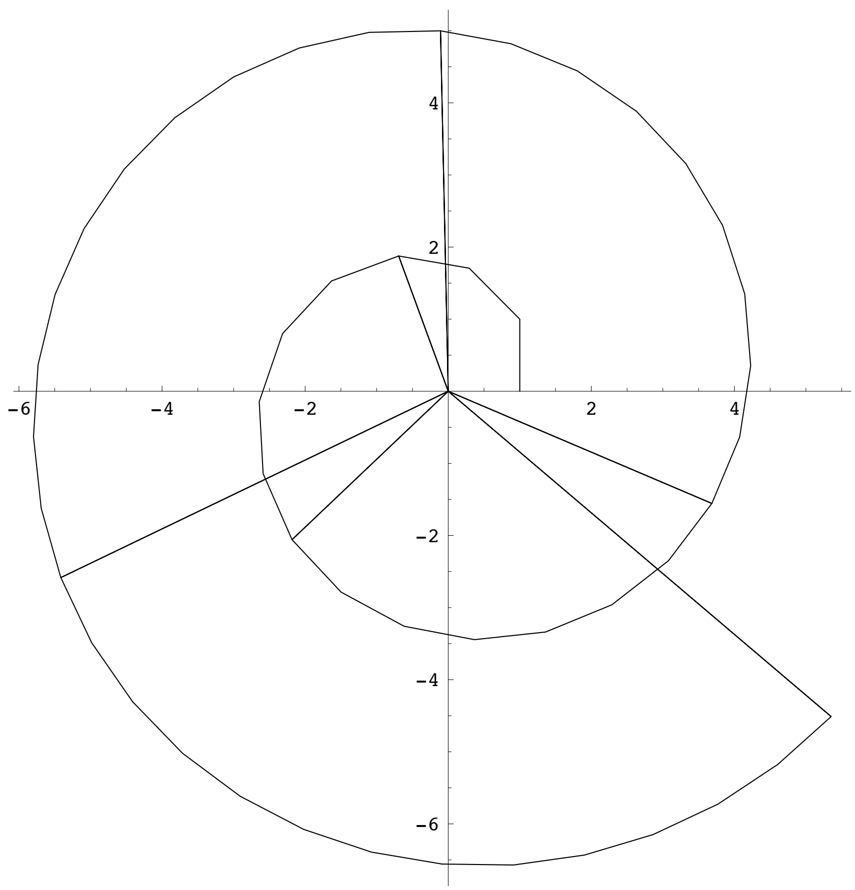
Die Gestalt der Wurzelspirale

Peter Gallin, Universität Zürich

Im Schulunterricht fasziniert die Wurzelspirale unsere Schülerinnen und Schüler immer wieder. Die einfache Methode, wie man die Strecken mit den Längen $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{10}$ usw. nacheinander rekursiv konstruieren kann, besticht und weckt sogleich auch Fragen nach der Genauigkeit der Konstruktion und nach Vereinfachungen, sobald eine bestimmte Wurzel direkt zu konstruieren ist.



In dieser Darstellung im kartesischen Koordinatensystem starten wir beim Punkt (1/0), errichten dort eine Einheitsstrecke senkrecht zur horizontalen Achse und erhielten so die Strecke der Länge $\sqrt{2}$, sofern wir den Punkt (1/1) mit dem Ursprung des Koordinatensystems verbinden würden. Dann fahren wir weiter und zeichnen eine Einheitsstrecke senkrecht zu dieser Verbindung und erhalten so die Strecke mit der Länge $\sqrt{3}$. Erst bei der nächsten Konstruktion aber, bei der Konstruktion von $\sqrt{4} = 2$, zeichnen wir die Verbindungsstrecke der Länge 2 auch wirklich ein. So fahren wir weiter und zeichnen nur die ganzzahligen Radien der entstehenden Spirale ein. Es fällt auf, dass der Zwischenwinkel zwischen diesen Radien ungefähr konstant bleibt. Die Berechnung liefert folgende genaueren Werte (in Bogenmass) für die Zwischenwinkel zwischen den ersten 7 Radien mit den Längen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7: 1.92448, 1.97298, 1.98629, 1.99173, 1.99447, 1.99605. Bereits vermutet man eine Annäherung an den Winkel 2, was wir im Folgenden auch beweisen werden. Dieser Sachverhalt besagt aber, dass der Radius der Wurzelspirale im Wesentlichen linear mit dem Argumentwinkel wächst. Das bedeutet, dass die Wurzelspirale weit aussen im Wesentlichen wie eine archimedische Spirale aussieht.

Erstaunlicherweise lässt sich der Beweis mit analytischen Mitteln des Gymnasiums gut durchführen. Allerdings ist eine Abschätzung erforderlich, welche eher selten zum Zug kommt. Im ersten Moment schreckt man vielleicht vor einer rechnerischen Behandlung dieser Spirale zurück, weil man erkennt, dass letztlich fortlaufend Winkel addiert werden müssen, deren Tangens Kehrwerte von Wurzeln der natürlichen Zahlen sind. Es gibt zwar Formeln für die Summe von Arcus-Tangens-Werten, die ihrerseits eine interessante Struktur aufweisen (siehe Nachtrag), hier aber zu unglaublich komplizierten Termen führen würden. Somit ist es besser, mit relativ groben Abschätzungen von oben und von unten (Majoranten und Minoranten) zu argumentieren. Wir untersuchen also den Zwischenwinkel zwischen den zwei ganzzahligen Radien $\sqrt{n^2} = n$ und $\sqrt{(n+1)^2} = n+1$. Dieser Winkel α_n ergibt sich aus

$$\alpha_n = \sum_{j=0}^{(n+1)^2-n^2-1} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+j}}\right) = \sum_{j=0}^{2n} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+j}}\right) .$$

Da die Summanden monoton fallende Winkelwerte sind, können wir alle durch den ersten ($j = 0$) ersetzen und erhalten damit eine Majorante:

$$\alpha_n = \sum_{j=0}^{2n} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+j}}\right) < \sum_{j=0}^{2n} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = (2n+1)\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$

Mit $\arctan(x) \leq x$ folgt

$$\alpha_n < \frac{2n+1}{n} ,$$

was bereits die obere Schranke 2 ergibt für $n \to \infty$.

Umgekehrt können wir auch alle Summanden durch den Winkelsummanden, der dem letzten Summanden nachfolgt, ersetzen ($j = 2n+1$) und erhalten so eine Minorante:

$$\alpha_n = \sum_{j=0}^{2n} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+j}}\right) > \sum_{j=0}^{2n} \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) = (2n+1)\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

Mit $\arctan(x) \geq x - \frac{x^3}{3}$ folgt

$$\alpha_n > (2n+1)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}\right)^3\right) = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n+1}{3(n+1)^3} ,$$

was nun die untere Schranke 2 ergibt für $n \to \infty$. Damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 2$$

bewiesen.

Nachtrag: Ohne Beweis seien hier noch die versprochenen Formeln für die Addition von Arcus-Tangens-Werten angegeben. Es gilt für hinreichend kleine Argumente:

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$$

$$\arctan(a) + \arctan(b) + \arctan(c) = \arctan\left(\frac{a+b+c-abc}{1-ab-ac-bc}\right)$$

$$\arctan(a) + \arctan(b) + \arctan(c) + \arctan(d) = \arctan\left(\frac{a+b+c+d-abc-abd-acd-bcd}{1-ab-ac-ad-bc-bd-cd+abcd}\right)$$

Erinnerungen an die Ein- und Ausschaltformel werden wach. Setzt man $\alpha = \arctan(a)$, $\beta = \arctan(b)$ usw., so ergeben sich verallgemeinerte Tangens-Additionstheoreme.